

PROBLÉM  $k$  NA CESTĚ  
NA SPÁRUPROSTÝCH GRAFECH

Jiří Fiala    Marcin Kamiński  
Bernard Lidický    Daniël Paulusma

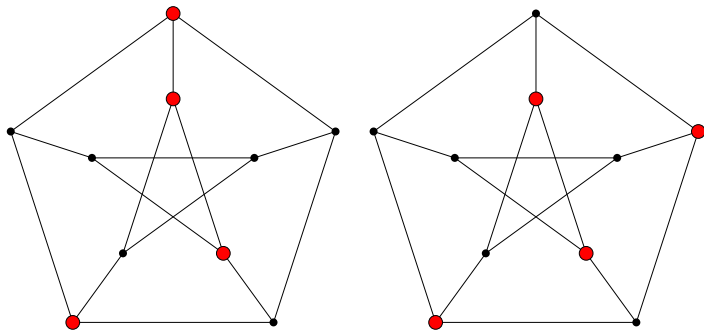
# FORMULACE PROBLÉMU

$k$  NA CESTĚ

VSTUP: Graf  $G$ , terminály  $t_1, \dots, t_k$ .

OTÁZKA: Má  $G$  indukovanou cestu skrz terminály  $t_1, \dots, t_k$ ?

PŘÍKLAD:



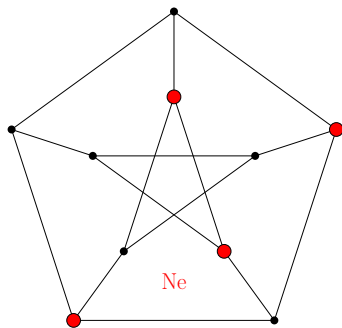
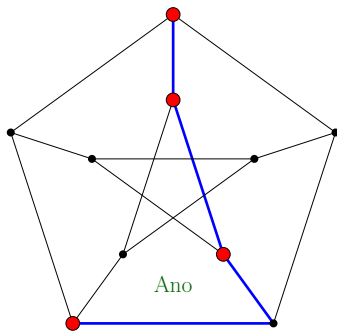
# FORMULACE PROBLÉMU

$k$  NA CESTĚ

VSTUP: Graf  $G$ , terminály  $t_1, \dots, t_k$ .

OTÁZKA: Má  $G$  indukovanou cestu skrz terminály  $t_1, \dots, t_k$ ?

PŘÍKLAD:



## ZNÁMÉ VÝSLEDKY O PŘÍBUZNÝCH PROBLÉMECH

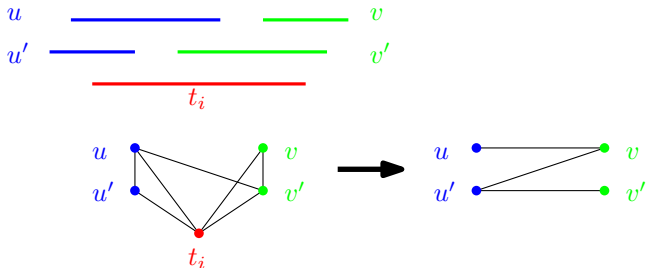
- ▶ pevné  $k$ , ne nutně indukovaná cesta, obecné grafy:  $\in P$   
[Robertson, Seymour]
- ▶ POZOROVÁNÍ: Cesta v  $G \iff$  indukovaná cesta v  $L(G)$
- ▶ DŮSLEDEK: pevné  $k$ , indukovaná cesta, hranové grafy  $\in P$
- ▶  $k = 4$ , indukovaný strom s 1 větvením, obecné grafy  $\in NP_c$
- ▶  $k = 3$ , indukovaný strom, obecné grafy  $\in P$   
[Chudnovská, Seymour]
- ▶ POZOROVÁNÍ: na spáruprostých je indukovaný strom  
indukovaná cesta
- ▶ DŮSLEDEK:  $k = 3$ , indukovaná cesta, spáruprosté grafy  $\in P$

Další dvě třídy u nichž je  $k$  NA CESTĚ  $\in P$

- ▶ (ryzí) intervalové grafy
- ▶ (ryzí) obloukové grafy

Pořadí terminálů odpovídá uspořádání intervalů zleva doprava nebo naopak.

Zamezení zkratek na okolí terminálů lze provést náhradou bipartitními grafy.



# NOVÝ VÝSLEDEK

**VĚTA:** Problém  $k$  NA CESTĚ na spáruprostých grafech je řešitelný v polynomiálním čase pro každé pevné  $k$ ; a stane se NP-úplným, jakmile je  $k$  součástí vstupu.

NP-úplnost redukcí z hamiltonovské cesty.

## IDEA ALGORITMU

Postupné zjednodušení a redukce grafu  $G$ :

- I. redukce ze spáruprostých na kvazi-hranové grafy
- II. rozklad kvazi-hranových grafů

**DEFINICE:** *Kvazi-hranový graf* je takový graf, v němž lze okolí každého vrcholu pokrýt dvěma klikami.

## ČÁST I: REDUKCE NA KVAZI-HRANOVÉ GRAFY

- 1) Omezíme se na pevné pořadí terminálů, kde vnitřní terminály mají stupeň 2 a krajní 1.  
Hrubou silou prozkoumáme každou z  $O(k!n^{2k-2})$  možností
- 2) Vyčištění — odstraníme vrcholy, které neleží na žádné indukované cestě mezi  $t_1$  a  $t_k$ .  
DŮSLEDEK:  $G$  nemá  $\overline{C_k}$  pro lichá  $k \geq 7$  [Paulusma a spol.].
- 3) Odstraníme  $C_5$  na okolích vrcholů — rozborem případů, jak lze cestu přesměřovat.

# ČÁST I: REDUKCE NA KVAZI-HRANOVÉ GRAFY

- 1) Omezíme se na pevné pořadí terminálů, kde vnitřní terminály mají stupeň 2 a krajní 1.  
Hrubou silou prozkoumáme každou z  $O(k!n^{2k-2})$  možností
- 2) Vyčištění — odstraníme vrcholy, které neleží na žádné indukované cestě mezi  $t_1$  a  $t_k$ .  
DŮSLEDEK:  $G$  nemá  $\overline{C}_k$  pro lichá  $k \geq 7$  [Paulusma a spol.].
- 3) Odstraníme  $C_5$  na okolích vrcholů — rozborem případů, jak lze cestu přesměřovat.

Nyní:  $G$  nemá liché cykly  $C_k$  pro  $k \geq 5$  na okolích vrcholů

$\iff \forall u \in V_G : N(u)$  je doplněk bipartitního

$\iff \forall u \in V_G : N(u)$  lze pokrýt dvěma klikami

$\iff G$  je kvazi-hranový graf



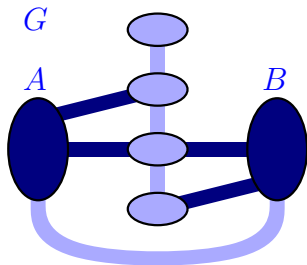
## ČÁST II: ROZKLAD KVAZI-HRANOVÝCH GRAFŮ

**VĚTA:** Každý kvazi-hranový graf bez homogenních párů klik je ryzí obloukový graf nebo slepenec intervalových grafů.

[Chudnovská, Seymour]; algoritmicky [King, Reed]

**DEFINICE:**  $A$  a  $B$  tvoří *homogenní pár klik*, pokud každý zbylý vrchol je spojen se všemi, nebo s žádným vrcholem  $A$ , resp.  $B$ .

**LEMMA:** Je-li  $G$  kvazi-hranový graf a  $A, B$  je homogenní pár klik, potom  $k$  NA CESTĚ v  $G$  lze redukovat na  $k$  NA CESTĚ v  $G'$ , který vznikne z  $G$  kontrakcí klik  $A$  a  $B$ .



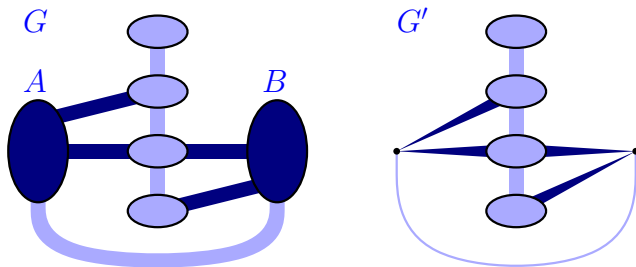
## ČÁST II: ROZKLAD KVAZI-HRANOVÝCH GRAFŮ

**VĚTA:** Každý kvazi-hranový graf bez homogenních párů klik je ryzí obloukový graf nebo slepenec intervalových grafů.

[Chudnovská, Seymour]; algoritmicky [King, Reed]

**DEFINICE:**  $A$  a  $B$  tvoří *homogenní pár klik*, pokud každý zbylý vrchol je spojen se všemi, nebo s žádným vrcholem  $A$ , resp.  $B$ .

**LEMMA:** Je-li  $G$  kvazi-hranový graf a  $A, B$  je homogenní pár klik, potom  $k$  NA CESTĚ v  $G$  lze redukovat na  $k$  NA CESTĚ v  $G'$ , který vznikne z  $G$  kontrakcí klik  $A$  a  $B$ .



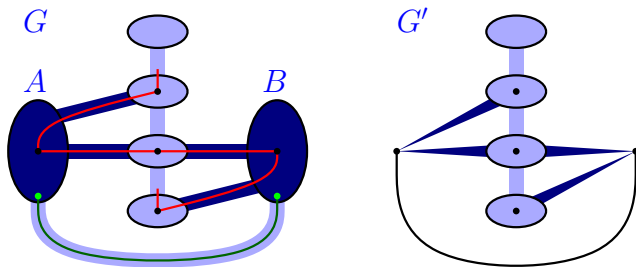
## ČÁST II: ROZKLAD KVAZI-HRANOVÝCH GRAFŮ

**VĚTA:** Každý kvazi-hranový graf bez homogenních párů klik je ryzí obloukový graf nebo slepenec intervalových grafů.

[Chudnovská, Seymour]; algoritmicky [King, Reed]

**DEFINICE:**  $A$  a  $B$  tvoří *homogenní pár klik*, pokud každý zbylý vrchol je spojen se všemi, nebo s žádným vrcholem  $A$ , resp.  $B$ .

**LEMMA:** Je-li  $G$  kvazi-hranový graf a  $A, B$  je homogenní pár klik, potom  $k$  NA CESTĚ v  $G$  lze redukovat na  $k$  NA CESTĚ v  $G'$ , který vznikne z  $G$  kontrakcí klik  $A$  a  $B$ .



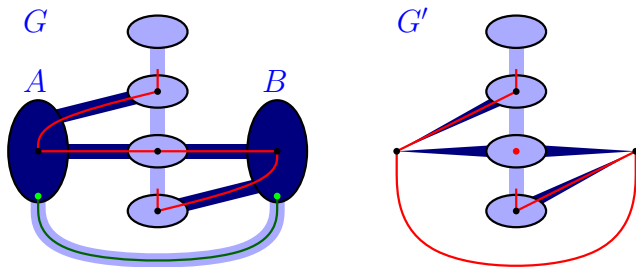
## ČÁST II: ROZKLAD KVAZI-HRANOVÝCH GRAFŮ

**VĚTA:** Každý kvazi-hranový graf bez homogenních párů klik je ryzí obloukový graf nebo slepenec intervalových grafů.

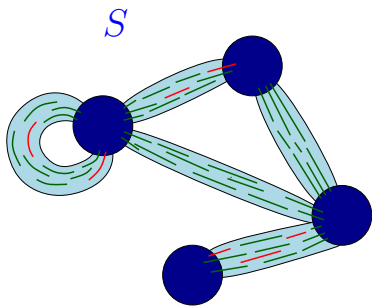
[Chudnovská, Seymour]; algoritmicky [King, Reed]

**DEFINICE:**  $A$  a  $B$  tvoří *homogenní pár klik*, pokud každý zbylý vrchol je spojen se všemi, nebo s žádným vrcholem  $A$ , resp.  $B$ .

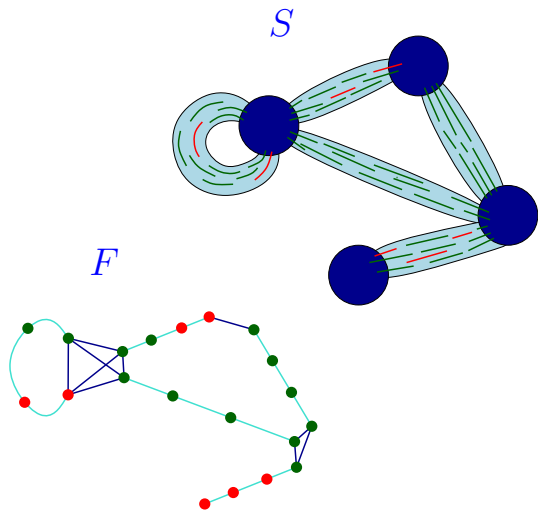
**LEMMA:** Je-li  $G$  kvazi-hranový graf a  $A, B$  je homogenní pár klik, potom  $k$  NA CESTĚ v  $G$  lze redukovat na  $k$  NA CESTĚ v  $G'$ , který vznikne z  $G$  kontrakcí klik  $A$  a  $B$ .



# SLEPENICE INTERVALOVÝCH GRAFŮ



# SLEPENICE INTERVALOVÝCH GRAFŮ



# SLEPENICE INTERVALOVÝCH GRAFŮ

